Metropolis vzorkovanie

Matej Marko

9. mája 2011

Úvod

Našim cieľom, vo všeobecnosti, je určiť hodnotu integrálu $I = \int f(x) \mathrm{d}x$. Odhad pomocou metódy Monte Carlo vyzerá nasledovne:

$$\hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(\xi_i)}{p(\xi_i)}$$

Vzorky ξ_i generujeme z rozdelenia daného hustotou $p(x)$. Pre lepší odhad je výhodné, aby rozdelenie $p(x)$ zodpovedalo priebehu funkcie $f(x)$. Túto podmienku je ťažké splniť. Často nepoznáme priebeh funkcie $f(x)$, alebo je zložité efektívne generovať vzorky z daného rozdelenie (integrovanie hustoty + inverzná funkcia).

Tento problém sa prejavuje aj pri odhadovaní illumination integrálu:

$$L_o = \int_{\Omega} L_i(\omega_i) BRDF(\omega_i, \omega_o) \cos\theta \mathrm{d}\omega_i$$

Vzorky generuje iba podľa BRDF nakoľko priebeh $L_i(\omega_i)$ nepoznáme. V skutočnosti by bolo výhodné vzorkovať celé svetelné cesty a to s hustotou, ktorá je úmerná prispévkom týchto ciest.

Metropolis vzorkovanie

Hlavnou výhodou metropolis vzorkovania je fakt, že dokáže generovať vzorky s prevdepodobnosťou úmernou funkcii $f(x)$. Potrebuje pri tom iba vedieť vyhodnotiť túto funkciu.

Máme danú funkciu $f(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, kde Ω je stavový priestor. Vzorky sú postupne generované ako Markovský reťazec. Novú vzorku x_i vygeneruje pomocou súčasnej vzorky x_{i-1}. Za predpokladu, že $x_{i-1} \sim f(x)$ (x_{i-1} bolá vygenerovaná s pst. úmernou $f(x)$), bude aj $x_i \sim f(x)$.

Generovanie novej vzorky (prechod do nového stavu) sa uskutočňuje pomocou tzv. mutácií. Sú to náhodné transformácie, ktoré sú popisané prechodovou funkciou:

$$T(x \to x') = \text{ pst. prechodu zo stavu } x \text{ do stavu } x'$$

T môžeme voliť ľubovoľne, musíme však dodržať podmienku ergodicity (musíme byť schopní dostať sa do každého stavu $x \in \Omega$). Prechod do nového stavu prebieha nasledovne:

- Vygeneruj x' podľa $T(x \to x')$
- Ak $\xi < a(x \to x')$, potom $x := x'$ (x' prijmeme s pst. $a(x \to x')$)
- Zaznamenaj x

(ξ je náhodná hodnota z intervalu $[0, 1]$)

Metropolis vzorkovanie sa snaží vyhýbať tým častiam Ω, na ktorých je hodnota $f(x)$ malá (napr. tmavé časti obrázka). Aj tieto časti však potrebujú nejaké vzorky, preto v sa modifikovanej variante zaznamenáva hodnota x aj x'. Tieto hodnoty sú však zaznamenané s váhami:

$$(1-a)weight \qquad \text{pre } x$$

$$(a)weight \qquad \text{pre } x'$$

kde $a = a(x \to x')$.

Kľúčom pre dosiahnutie želanej vlastnosti $x_i \sim f(x)$ je dodržanie nasledujúcej rovnosti (tzv. Deatailed Balance):

$$f(x)T(x \to x')a(x \to x') = f(x')T(x' \to x)a(x' \to x)$$

Z detailed balance odvodíme vzťah pre pravdepodobnosť prijatia:

$$a(x \to x') = \min\{1, \frac{f(x')T(x' \to x)}{f(x)T(x \to x')}\}$$

Mutácie

Pri voľbe mutácii musíme zohladniť dva protichodné požiadavky:

- Chceme preskúmať celý stavový priestor Ω
- Chceme využiť stavy (vzorky) s veľkým príspevkom. T.j konať malé zmeny a preskúmavať integrand lokálne.

Riešením je kombinovať viaceré mutačné stratégie.

Pokiaľ zvolíme pravdepodobnosť prechodov tak, že platí:

$$\forall a, b : T(a \to b) = T(b \to a)$$

výsledná pravdepodobnosť prijatia závisí iba na príspevkoch pôvodného a nového stavu:

$$a(x \to x') = \min\{1, \frac{f(x')}{f(x)}\}$$

Pri náhodnej prechádzke závisí pravdepodobnosť prechodu iba na "vzdialenosti" vzoriek:

$$T(x \to x') = T(|x - x'|)$$

T môžme zvoliť tak, že jeho hodnota klesá s rastúcou vzdialenosťou. Takáto mutácia by preferovala malé, lokálne zmeny.

Nezávislé vzorkovanie generuje vzorky z hustoty $p(x)$ a úplne ignoruje súčasný stav:

$$T(x \to x') = p(x)$$

Ak by sme mali $p(x) = f_{pdf}$, tak nepotrebujeme metropolis vzorkovanie, ale priamo generujeme vzorky podľa normalizovanej f.

Problémom mutácií s malými zmenami je fakt, že keď narazia na stav s veľkým príspevkom, nemusia sa z neho "posunúť preč".Tento jav je vidieť na príklade vzorkovania funkcie $f(x) = (x - 0.5)^2$, keď sa použije iba druhá mutačná stratégia. Ak začneme "vľavo" je málo pravdepodobné, že sa podarí vygenerovať postupnosť krokov "doprava" a potom sa "prehupnúť" cez minimum funkcie v bode $x = 0.5$. Tomuto prípadu je možné sa vyhnúť občasným vygenerovaním uplne náhodnej vzorky. Ide v podstate o kombinovanie viacerých mutačných stratégií.

Start-up bias

Metropolis vzorkovanie predpokladá, že súčasný stav bol vygenerovaný s pst. úmernou $f(x)$. Problémom teda zostáva ako zvoliť počiatočný stav $x_0 \sim f(x)$.

Jednou z možností je zvoliť x_0 náhodne a následne nepoužiť niekoľko iterácii algoritmu. Stále však nevieme koľko vzoriek je potrebné vynechať.

Druhou možnosťou je vygenerovať x_0 podľa nejakej hustoty $p(x)$. Príspevok každej vzorky bude potom prenásobený váhou:

$$w = \frac{f(x_0)}{p(x_0)}$$

Tento prístup je korektný, ale váha w vystupuje ako absolútny škálovací faktor, čo môže sposobiť, že výsledný obrázok bude príliš tmavý, alebo naopak svetlý.

Spôsob ako odhadnúť správnu váhu w je nasledovný:

- Vygenerujeme N vzoriek $x_1, ..., x_N$, podľa hustoty $p(x)$
- Spočítame váhy $w_i = \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$
- Iniciálnu vzorku x_0 vyberieme z x_i podľa diskrétneho rozdelenia daného váhami w_i
- Za váhu w zvolíme priemer $w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} w_i$

Motion blur

Ak máme daný integrál $\int f(x)g(x)\mathrm{d}\Omega$ potom odhad pomocou MC môžme napísať ako:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_i)g(x)}{p(x_i)}$$

kde $x_i \sim p(x)$.

Metropolis vzorkovanie nám vracia vzorky$x_1, ..., x_N \sim f(x)$. Pravdepodobnost každej vzorky je teda:

$$\frac{f(x_i)}{\int\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}\Omega}$$

Po dosadení môžme teda odhad pomocou metropolis napísať ako:

$$[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x)] \cdot \int\limits_{\Omega} f(x)\mathrm{d}\Omega$$

Predstavme si zjednodušenú simuláciu kamery s konečne dlhou uzávierkou. Majme danú funkciu $L(u, v, t)$, ktorá predstavuje hodnotu radiancie na súradniciach u, v v čase t. Stavový priestor je potom: $\Omega = [0, u_{max}] \times [0, v_{max}] \times [0, 1]$. Hodnotu j-teho pixelu (s rekonštrukčným filtrom h_j) môžeme vyjadriť:

$$I_j = \int\limits_{\Omega} h_j(u, v)L(u, v, t)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t$$

Ak generujeme vzorky $x_i \sim L_{pdf}$ (normalizovanej funkcie L), dostávame:

$$I_j \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h_j(x_i) \cdot \int\limits_{\Omega} L(x)\mathrm{d}\Omega$$

Mutácie použité pri generovaní vzoriek:

- Úplne nová hodnota (u, v, t) (ergodicita)
- Zmena $u, v \pm 8$pixelov, $t \pm 0.01$ (využitie miest s veľkým príspevkom)

Light Transport

Aplikácia metropolis vzorkovania v realistickej syntéze obrazu.

Stavový priestor Ω tvoria svetelné cesty od svetla do kamery. Jedna svetelná cesta je $\overline{x} \in \Omega$. Máme definovanú funciu príspevku cesty $f(\overline{x})$:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) = {} & L_e(x_0 \to x_1)G(x_0 \leftrightarrow x_1)W_e(x_{k-1} \to x_k) \\ & \cdot \prod_{i=1}^{k-1} BRDF(x_{i-1} \to x_i \to x_{i+1})G(x_i \leftrightarrow x_{i+1}) \end{aligned}$$

Iniciálnu cestu je možné generovať pomocou path tracingu (prípadne použiť metódu na odstránenie start-up biasu).

Použité mútácie sú troch druhov:

- Caustic pertrubation - cesta vychádza zo svetla a po niekoľkých (resp. jednom) lesklom odraze/lome dopadne na difúzny povrch. Mierne sa zmení smer lúča zo zdroja svetla, po difúznej ploche sa cesta napojí naspäť na pôvodnú.

- Lens pertrubation - podobne ako pri kaustikách, ale vychýlime lúčidúci z kamery.

- Bidiractional mutation - úsek cesty sa nahradí novým.

Prvé dve mutácie sú lokálne, zatiaľ čo tretia zabezpečuje ergodicitu.

MLT je algoritmus úspešný predovšetkým na scénach, ktoré su komplikované pre iné, jednoduchšie algoritmy (napr. scéna obsahuje úzku štrbinu, ktorá je jediným zdrojom svetla). Na druhej strane však zanecháva typické artefakty, ktoré sú spôsobené sekvenciami lokálnych mutácií.